**Лекция 16**

*Преобразование Лежандра*

Исходя из уравнений Лагранжа введём импульсы (обобщённые импульсы):

Система уравнений Лагранжа состоит из *s* обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат , для которых существуют способы сведения к системе из *2s* уравнений первого порядка. Можно помимо переменных ввести переменные и получить симметричную форму канонических (гамильтоновых уравнений).

Ввиду , а не зависит от обобщенных скоростей, то получаем равенство: Т.к. , то разрешимы относительно : .

Введём функцию Гамильтона . Далее, используя вышевыведенные равенства, получаем:

*.*

Далее выводим канонические (гамильтоновы) уравнения:

Переход к этим уравнениям от уравнений Лагранжа второго рода при помощи обобщённых импульсов и функции Гамильтона называется преобразованием Лежандра.

*Преобразования Дирака*

Рассмотрим систему

Преобразование Дирака этих уравнений заключается в том, что в дополнение к «координатам» вводятся в рассмотрение «импульсы» и гамильтониан *H* по следующей формуле:

что приводит к гамильтоновой системе , .

*Интеграл механической энергии*

Используя гамильтоновы уравнения получаем:

Отсюда следует, при независимости гамильтониана от *t*, то он является первым интегралом канонических уравнений: на любом решении *q,p* этих уравнений, причём величина *h* не зависит от времени – она является постоянной механической энергии.

Далее, используя формулы

получаем интеграл механической энергии в форме Якоби-Остроградского:

*.*

Если соотношения (при помощи которых введены лагранжевы координаты) стационарны, то получаем , а интеграл механической энергии выглядит следующим образом:

*Циклические координаты и соответствующие первые интегралы первого рода*

Если функция Лагранжа не зависит явно от координат при , то такие координаты – *циклические*. При этом оставшиеся координат называются *позиционными*.

Из получаем, что , и далее из канонических уравнений получаем , где не меняются со временем, а отсюда функции являются первыми интегралами канонической системы, то есть – первый интеграл, соответствующий циклической координате .

Для позиционных координат существует замкнутая система канонических уравнений:

.

Подставив позиционные координаты в , , находим циклические координаты.

*Метод Пуассона построения первых интегралов*

*Скобки Пуассона*

Допустим – скалярные, дважды дифференцируемые функции канонических аргументов и времени.

Пусть – скобка Пуассона функций .

Имеются следующие скобки:

* Если , то
* – тождество Пуассона

*Теорема Пуассона*

Рассмотрим уравнение Гамильтона и скалярную функцию вместе со своей полной производной по *t:* . Далее получаем

Отсюда следует необходимое и достаточное условие того, что – первый интеграл уравнения Гамильтона:

**Теорема Пуассона:** Если функции – первые интегралы канонической системы уравнений Гамильтона, то функция тоже интеграл этой системы и .

*Построение интеграла в стационарном случае*

**Теорема:** Если , – первый интеграл системы уравнений Гамильтона, и функции , при непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то они также являются интегралами этой системы.

*Полный интеграл*

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка: , где *z* – вещественнозначная функция от *n* независимых вещественных аргументов .

Частный интеграл уравнения в области *D* – любая функция *z аргумента x, которая обращается в при .*

Полный интеграл уравнения в области *D* – *n-*параметрическое семейство интегралов

Что , а из исключением параметров можно получить уравнение .

Отсюда:

* полный интеграл определяется однозначно уравнением
* из полного интеграла может быть получен любой частный интеграл в *D*

При независимости от *z* полный интеграл может быть рассмотрен в виде .

При независимости от *z* и , можно положить . Далее , а преобразовывается в уравнение , имеющее интеграл

откуда получаем полный интеграл :

*Уравнение Гамильтона-Якоби*

Уравнения характеристик для уравнения в частных производных первого порядка вида – система обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме , где . Записав эти уравнения в симметрической форме можно заметить, что эта система уравнений характеристик для уравнений в частных производных вида : – уравнения Гамильтона-Якоби. Главная функция Гамильтона – неизвестная функция *S* аргументов и *t*.

Полный интеграл можно записать так: .

*Метод Якоби*

Этот метод решения канонических уравнений основан на том, что известен некоторый полный интеграл уравнения

**Теорема:** Если – область, а – полный интеграл вида уравнения , удовлетворяющий условию , то существует , что равенства представляет собой независимых интегралов канонических уравнений , где , как и , произвольные постоянные.

*Уравнения Лагранжа второго рода*

Сила, действующая на материальную точку *M* массы *m* в центральном поле сил в системе координат с началом в центре сил *O* задается формулой , а соответствующее уравнение Ньютона имеет вид , в котором , а – модуль силы, действующей на рассматриваемую материальную точку.

Центральное поле сил является потенциальным, и потенциал и потенциальная энергия задаются формулами . Тогда функция Лагранжа вычисляется так:

В качестве обобщенных координат можно использовать декартовы и любые криволинейные координаты.

*Уравнения Лагранжа в декартовых координатах*

При использовании декартовых координат в качестве обобщённых, то

,

.

Если в уравнения Лагранжа подставить *L* по вышевыведенной формуле и произвести все дифференцирования слева, то получим уравнения Ньютона .

*Уравнения Лагранжа в сферический координатах*

В качестве обобщённых координат введём сферические, задаваемые по формулами Далее, по известным ранее формулам, последовательно получаем , что

*Канонические уравнения относительно декартовых переменных*

Ради получения канонических уравнений для рассматриваемой задачи, введём импульсы и гамильтониан *H*:

.

Если в канонические уравнения для подставить *H* и произвести справа дифференцирования, то в результате получим уравнения:

*Канонические уравнения относительно сферических переменных*

Используя для в сферических координатах переменных, введём импульсы , соответствующие координатам и гамильтониан:

*Уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых и сферических переменных*

Для рассматриваемой задачи о движении материальной точки в центральном поле уравнение Гамильтона-Якоби в декартовых переменных имеет следующий вид:

*Общий интеграл уравнений движения*

Так как уравнение Гамильтона не зависит явно от , то его полный интеграл будем искать в виде:

Подставляя это уравнение в

получаем:

Функцию *Z* ищем в виде , из за чего получаем равенство:

Далее, если получаем

Система ; решается в квадратурах:

Благодаря ; получаем: